ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΣΤΟΛΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $x_{n+1} = 2^{-x_n}$ συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [0,1]$

ΛΥΣΗ

Με μια αναδιάταξη αν η x_{n+1}, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ συγκλίνει τότε θα βρίσκει τη ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ με $f(x) = x - 2^{-x}$, στο $\Delta[0,1]$

$f(1) = \frac{1}{2} > 0$ και $f(0) = -1 < 0$

$Sgn(f(1)) \neq Sgn(f(2))$

$f \in C[0,1]$

$\Longrightarrow$ ΘΕΤ. : $\exists x^* \in (0,1)$ ώστε $f(x^*) = 0$

αλλά η ρίζα θα πρέπει να είναι μοναδική

Άρα, βρίσκουμε: $f'(x) = 1 - \left(\frac{1}{2^x}\right)' = 1 + \frac{\ln 2}{2^x} > 0 \ \forall x \in [0,1]$

άρα η $f \uparrow$ στο $[0,1]$ άρα η ρίζα μοναδική

Στη συνέχεια φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή

$\varphi(x) = x \Longrightarrow x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 2^{-x} \Rightarrow \varphi(x) = 2^{-x}$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$

Ενώ $\varphi'(x) = -(\ln 2) \cdot 2^{-x}$ με φ' συνεχής στο $[0,1]$

και μάλιστα $\varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi \downarrow$ στο $[0,1]$

άρα $\varphi([0,1]) = [\varphi(1), \varphi(0)] = [\frac{1}{2}, 1] \subseteq [0,1]$ καλώς ορισμένη

Έπειτα, $\mathcal{L} = \max_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| = \ln 2 \cdot \max_{x \in [0,1]} \left|\frac{1}{2^x}\right| = \ln 2 < 1$ συστολή

Άρα, πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος της Συστολής, επομένως η $x_{n+1} = 2^{-x_n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ συγκλίνει στη μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $[0,1]$.

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Έστω η ακολουθία $x_{n+1} = e^{-x_n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Να αποδείξετε ότι η x_{n+1}, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [0.4, 0.7]$

ΛΥΣΗ

Ομοίως με την Άσκηση 1η έχουμε:

$f(0.4) = -0{,}27 < 0$ και $f(0.7) = 0{,}20 > 0$

με $f \in C[0.4, 0.7]$ και τύπο

$f(x) = x - e^{x}$

$sgn(f(0.4)) \neq sgn(f(0.7))$

$\Longrightarrow$ Θ.Ε.Τ. $\rightsquigarrow \exists x^* \in (0.4, 0.7)$ ώστε $f(x^*) = 0$.

Έπειτα, $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$, $\forall x \in [0.4, 0.7]$

άρα η $f \uparrow$ στο $[0.4, 0.7] \Rightarrow x^*$ μοναδική ρίζα

Ορίζω στη συνέχεια $x = \varphi(x) \rightsquigarrow \varphi(x) = e^{-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = -e^{-x} < 0$ συνεχής η φ και η φ'

επί $\varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi \searrow$ στο $[0.4, 0.7]$

Τουτέστιν, $\varphi([0.4, 0.7]) = [\varphi(0.7), \varphi(0.4)] = [0.50, 0.67]$

όπου $[0.50, 0.67] \subseteq [0.4, 0.7]$ καλώς ορισμένη

Ενώ, $\lambda = \max_{x \in [0.4, 0.7]} |\varphi'(x)| = \max_{x \in [0.4, 0.7]} \left| \frac{1}{e^x} \right| = \frac{1}{e^{0.4}} \approx 0.67 < 1$

συστολή

Άρα, από Θεώρημα συστολής

η ακολουθία $x_{n+1} = e^{-x_n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

θα συγκλίνει στο μοναδικό x^* της

$f(x) = 0$ στο $[0.4, 0.7]$